

# 紙飛行機の運動学：Dynamics of Paper AirPlane

2014.5.5 宮武

運動の微分方程式をたてることを、モデリングという。現象を注意深く観測することが重要である。

(1) ボールは、放物線を描いて飛ぶがなぜ紙飛行機はループを描いたりするか。

紙飛行機は、進行方向と直角に揚力が働くので、一定の速度の場合これが向心力として働き、円状の運動を起こす。重力も働くので正円ではない。揚力の有無による。放物線を描いて飛ぶような紙飛行機は、揚力がないので飛行機ではない。

(2) 重力がなければ、どのように飛ぶか。

宇宙船での実験ビデオがある。円形に回転運動を継続する。そして、この半径は、紙の重さに無関係に一定である。地上でも僅かな上昇気流をつくれば室内でも永続的に円運動する報告がある。(YouTube)

(3) ボールにも揚力が働くのではないか。

ボールが左に飛ぶとき、時計回りに回転しながら飛行すれば、揚力が空気の流れから発生するが、重さに対して小さいので無視する場合が多い。

(4) 紙飛行機を水平に投げて、急上昇して失速したりする場合と、上昇せずに急下降する場合があるがその理由は何か。

紙飛行機の重心と揚力の中心が異なるために、回転モーメントが働くためである。前者は揚力中心が、前方すぎる。後者は、後方すぎる。回転モーメントは、飛行速度も影響する。

(5) 水平に低速で飛行する飛行機には、どのようなバランス式が成立しているか。

上下、前後の双方向に加速度がないことから、

揚力（上向き）＝重力（下向き）

推力（前方）＝抗力（後方） の2つの式が成立している。

(6) 紙飛行機の重力中心はどこか。

紙の重力の中心なので、4角形の場合、進行方向の線分のほぼ中央。

(7) 揚力の中心はどの辺りか。

難しい。仰角、翼の形状、速度などの影響をうけるものと考えられる。飛行機の主翼の場合は、翼幅の中心よりも前にあることが、実験やしミュレーションで報告されている。四角形の凧の場合も仰角を見込んで、凧糸の絞り点を中心部より前方に置いている。風洞実験は知らない。

(8) 紙飛行機の揚力は、仰角がない場合発生するか。

仰角がない場合、重力に対して、紙の空気抵抗が発生する。低速でもほぼ水平に飛ぶことから、ほとんど揚力はなく空気抵抗がきいている。上側と下側の空気の流速も同等なので、ベルヌーイの方程式から、理論上圧力差による揚力は無いものと予想される。

(9) 仰角がある場合、空気分子がぶつかる運動量の反力によって、揚力が上方に発生しているのであり、ベルヌーイの方程式で説明するのは間違いとの説があるが本当か。

いいえ。反力は働くものであるが、実際に発生している揚力は、空気を下方に押し下げた運動量よりも非常に大きい。これは、凧揚げの揚力、抗力の実験からも確かめられている。四角形の凧もおおきい揚抗比を示している。ベルヌーイの方程式にある空気流による圧力差が、仰角によって発生しているものである。

(10) では、揚力を増やすために、仰角を大きくすれば良いか。

適度に仰角を与えると良い。仰角にほぼ比例して揚力が大きくなるが、抗力も大きくなる。また、大きすぎると空気流が剥離して突然失速しやすい。不安定になる。

(11) 飛行の効率を上げて遠くまで飛ばすにはどうすれば良いか。

揚力を大きくし、抗力を少なくすればよい。そのためには、紙飛行機を巧く折って、ピッチングやローリングを無くする工夫（わずかに湾曲させたり、翼端を折るなど）、重心・揚力中心、仰角、初速度を工夫したい。

(12) 揚力・抗力比はどうやって計算できるか。

飛行データや実験・シミュレーションから求める。紙の形、重さなどの情報のみで、簡単に計算できないのが残念ながら現状である。自動車の抗力係数も同じ。旅客機などの翼の揚抗比(滑空比)は概ね20位です。グライダーなどの翼の揚抗比(滑空比)は28~60位です。これを距離で表すと、1kmの高さ(降下距離)から無風状態で滑空すると、揚抗比20であれば、20kmになり、揚抗比28~60であれば、28km~60kmの水平距離ということになります

(13) ゴム飛行機の翼は全部主翼がおおきく横長であるがなぜか。

アスペクト比(翼部の縦横比)を大きくとることで揚力を大きくする効果がある。また揚力中心を重心の少し前に置くことで安定飛行を実現できる。

(以下参考)アスペクト比の影響を実験した研究によれば、典型的な三角翼はアスペクト比1~2。矩形翼などはアスペクト比.6以上。抗力そのものはアスペクト比の大きな矩形翼が大きいわけではないが、迎角を増したときの揚力がすぐ頭打ちになり揚抗比が急激に落ちる。一方アスペクト比の小さなデルタ翼では、迎角増加とともに揚力が増し、その頭打ちの角度が大きく、揚抗比を維持している。

一般的な翼型では前縁が曲線的で後縁が鋭くとがった形状になっている。このような形状の翼であれば、空気抵抗は非常に小さく、若干の迎角をつければ揚力が生じる事になる。翼の下面にお

いて気流が押し下げられているのは当然だが、翼の上面においても気流が翼面に沿って流れる性質によって気流が下方に曲げられており、その双方で揚力を発生している。

なお、迎角がさらに大きくなると気流が翼表面から剥離してしまう。その場合空気抵抗が大きくなり、また気流が乱れてしまいきれいに下方に曲がってくれないために揚力が小さくなる。この現象を失速という。翼型は、迎角をできるだけ大きくとって失速しない形が望ましい。

そのひとつは、翼型を湾曲させる事である。前縁部では若干の迎角をつければ、後縁部ではより大きく迎角をつけた事になる。このような翼型は低速の初期の航空機に採用例が多い。迎角ゼロでも揚力が大きいので、低速域ならともかく高速域では揚力過剰となり、また抵抗も大きくなり効率も悪い。現代航空機においては、離着陸時など低速域においてのみ翼型を湾曲させたような形にする機構が付加されている。それがフラップである。

## 揚力の間違い説

### 1.等時間通過説

NASAの用語では“Longer path” or “Equal transit” Theoryという。あるいは「同着説」ともよぶ。それはこんな説明だ。翼とともに運動する系から見ると、空気が前方からやってくる。そして翼に当たる。翼の前端で上下に分かれた空気は、後端に「同時に」到着する。ところが飛行機の翼の断面は上面が下面より膨らんでいて、上面の距離が長いので、上面の空気は速く走らなければならない。これが上面と下面の圧力差を生み、揚力ができるとの説である。反証は、風洞実験で得られている。また、紙飛行機やヨットである。紙飛行機の翼は一枚の紙であるので、上面の長さ下面の長さが等しい。それでも紙飛行機は飛ぶのである。ヨットなどの薄い帆に揚力が働くのも同じ。

### 2.飛び石説

Stepping Stone 説とも言われるが、水面を飛ぶ投げ石のように、下面が空気分子（石の場合は水）にぶつかる反力で飛ぶとの説である。飛び石説が正しいとすれば、翼は下面のみが重要で、上面はどうでも良いことになる。しかし実際の旅客機は下面にエンジンを吊るしている。翼の下面が重要なら、そこにはよけいなものを置かないできれいにすべきである。しかし実際の飛行機は上面をきれいにする。

## 循環流の理論の始まり

円柱を流れに直角方向に押しやる力の大きさを理論的に求めたのがジュコフスキー（ロシア）と、クッタ（ドイツ）でありその結果はクッタ・ジュコフスキーの定理言われている。これは「速度  $V$  なる一様流中に二次元物体が置かれたとき、その物体まわりの循環の強さが  $\Gamma$ 、流体の密度  $\rho$  であるであると、一様流の方向と物体軸の方向を含む面に直角に、物体の単位幅当たり  $\rho V \Gamma$  の力が生ずる。」

<http://en.wikipedia.org/wiki/Airfoil>

## 飛行の理論

2014.5.5 宮武 訳

飛行は自然界にみられる現象である。鳥は羽を羽ばたいて飛ぶだけでなく、羽をおおきく広げて長距離を滑空する。煙は微小粒子で成り立っているが空中を1000feet以上も上昇する。これら2つの飛行は、物理学の原理で説明できるはずである。同様に、人工の飛行機も重力に打ち勝って飛行している。

空気より軽いもの、例えば熱気球のようなものは、浮力 (Buoyancy) の原理が働いている。熱気球などは、まるで水上の筏のように空中を浮遊する。筏はその比重が水よりも軽いので浮かぶ。空気の密度は水と違って一定ではなく、気圧によって変化する。熱気球のなかの熱い空気は、地表の空気よりも軽いので上昇する。



空気よりも重い飛行物体は、4つの力のバランスによって飛行する。

それは、揚力 (Lift)、抗力 (Drag)、重力(Gravity)、そして推力 (Thrust) である。

### 揚力 (Lift)

空気中で浮かぶためには、重力以上の力が必要であり、この力を揚力と呼ぶ。この揚力は翼 (airfoil)の上の空気の流れによって生み出される。高速の空気流は周囲の圧力を低下させる。翼の下の空気圧が上側の空気圧よりも大きいので、その結果として揚力が発生する。

翼が揚力を生むことを理解するためには、物理学における2つの重要な式を用いる必要がある。空気流の圧力変化は、ベルヌーイの法則によって最もうまく説明できる。スイスの数学者、ダニエル・ベルヌーイ (Daniel Bernoulli)によるベルヌーイ方程式は、次のとおりである。

$$P + (1/2)\rho V^2 = \text{一定}$$

ただし、P = 圧力

$\rho$  = 空気の密度

V = 気中の移動体の速度

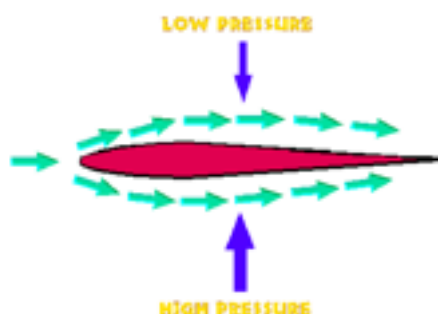
この式を理解するためには、もう一つの物理学の重要な式である連続の方程式 (Continuity equation) を理解しなければならない。簡単に言えば、どのような流れであっても、密度  $\rho$ 、横断面積 A、流速 Vの3つの積は、一定という式である。

$$\rho \cdot A \cdot V = \text{一定}$$

ただし、A = 流れの方向の横断面積

これらの2つの式を用いて、翼がどのように揚力を生み出すか示せる。

飛行機の翼のような翼上の空気の流れを考えてみよう。翼に届く前には空気の流れは一様である。翼を通過するとき、上側と下側の2つの流れに分かれる。



典型的な翼の形は、対象ではなく、下側よりも上側の面積が大きい。上側を通過するとき空気の流れが下側よりもより狭められる。

連続の式から、狭められた流れ（あるいは流域の減少）は、速度を上昇させることになる。

水は、パイプの中では狭い断面ではより早く流れる。同様に、翼の上側の流速は下側の流速よりも早くなる。

ベルヌーイの方程式は、流れが早くなれば、圧力が減少することを示している。翼の上側の圧力は、下側の流れより早いので、より圧力は小さくなる。上側と下側の圧力の差から、上昇方向の力が生まれる。これが揚力である。

事前に翼の形は決まっていないので、技術者は揚力係数  $CL$  を用いて、揚力の式を表す。揚力係数は、翼の形を定めることで決まる定数である。

### 揚力の式

$$\text{Lift} = CL \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \rho V^2 \right) \cdot S$$

ただし、 $S$ は翼の表面積であり、括弧のなかは動圧です。飛行機の翼を設計する際には、揚力係数をできるだけおおきくすることが有利である。

### 抗力 (Drag)

全ての空中を飛行する物体は、空気の流れの抵抗を経験する。この抵抗を抗力と呼ぶ。

抗力は多くの物理現象の結果である。圧力の抗力は、風の日のランニングで感じるであろう。向かい風は、追い風の場合よりも強い圧力になる。表面の摩擦あるいは粘性抗力は、泳ぐ人が経験するものである。スイマーの体の周りの水流は、スイマーの速度を遅くするような摩擦を生み出す。粗い表面は、滑らかな表面よりも、より大きい摩擦力になる。摩擦力を減少させるために、スイマーは、できるだけ滑らかになるように、水泳帽をかぶり足を剃る。飛行機の翼も抗力を減らすために滑らかに作られている。

揚力と同様に、抗力は動圧とその働く面積に比例する。そして抗力係数は、揚力係数と同じく、動圧を抗力に変換するための測度である。

しかし、揚力係数と異なるのは、技術者はこれをできるだけ少なくなるように設計する。抗力を減らすことで飛行効率が良くなるので、係数は小さい程望ましい。

$$D_{\text{rug}} = C_D \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \rho V^2 \right) \cdot A$$

## 重さ (weight)

重さは、設計上の制約要因である。重い飛行機あるいは重い荷物を運ぶ飛行機は、軽い飛行機よりも大きい揚力が必要になる。そして地表を加速することでより大きい推力が必要になる。小さい飛行機では、荷重の位置も重要になる。小さい飛行機では、荷重があまりに前方や後方に位置するとバランスを崩し不安定になる。

重さは、ニュートンの第2法則の式で計算できる。

$$W = m \cdot g$$

ただし、Wは重さであり、mは質量、gは地球の重力による加速度である。

## 推力 (Thrust)

推進方式は、いろいろな物理学の原理が含まれている。熱力学、空気力学、流体力学、物理学などの全てが役割を担っている。

推力それ自体は、ニュートンの運動の第2法則で記述される。

この法則の基本形は

$$F = m \cdot a$$

であり、力(force)は、質量(m)と加速度(a)の積で表せる。加速度は、その時点での速度の変化率である。加速度は、空気の質量を加速させることで生み出される。

<http://ja.wikipedia.org/wiki/揚力>

## 揚力とは

運動量の時間変化は質量流量と流速の積になるので、揚力のモデル式は、揚力係数

$C_L$  を用いて、以下のように表されるのが一般的である。

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 SC_L$$

- ・  $C_L$  は揚力係数（次項で解説）（Coefficient of Lift）
- ・  $\rho$  は流体の密度（海面高度の大気中なら 1.2250 kg/m<sup>3</sup>）
- ・  $V$  は物体と流体の相対速度 (Velocity)
- ・  $S$  は物体の代表面積 (Surface)
- ・  $L$  は、発生する揚力 (Lift)

よって揚力は、物体の相似比の二乗と流体の密度と流速の二乗の積に比例する。係数が異なるだけで抗力と同形式である。

揚力係数

揚力係数  $C_L$  は、揚力を動圧 ( $\frac{1}{2}\rho V^2$ ) と代表面積で無次元化したもので、物体の形状、迎角、流体の物性、マッハ数、レイノルズ数などによって変化する。

- ・ 迎角の絶対値が小さいとき、揚力係数はほぼ迎角に比例する。
- ・ 迎角の絶対値が大きくなると、物体表面から流れが剥離して揚力係数は急激に小さくなる。この現象を失速と呼ぶ。
- ・ 空気中の揚力係数は、地面や水面の近くでは、離れた高さより大きくなる。それを地面効果という。

## 揚抗比

抗力に対する揚力の比を揚抗比という。すなわち流れの方向と、物体が受ける力の方向のなす角度の正接である。抗力は常に正なので、その角度は±90°を超えない。したがって揚抗比は±1を超える場合もあるが、無限値に発散することはない。実際に、翼等は、その角度が90°に近づき、揚力が抗力の何倍も大きく、揚抗比が1よりずっと大きい。

揚力は大きく、抗力は小さく設計したいので、これを最大化することが重要である

それにより、外輪船はスクルー船に負け観光用しか残らず、風車は性能的には揚力型が抗力型より優れ、飛行機は翼から抗力で消費する推力以上の揚力を得ている。ヨットなど縦帆をもつ帆船は、風下に対し70°程度の方向に航行するとき最も推進力が強く、水中のセンターボードや舵の力とあわせれば風上側にも進める。

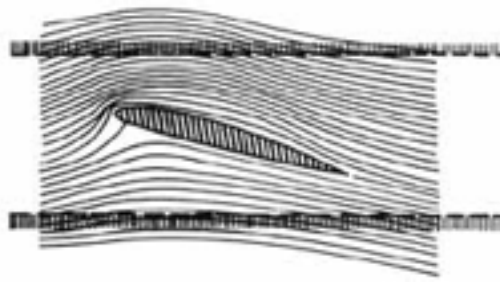
多くの揚力を利用する物体は、揚抗比を大きくするため抗力を小さくすることが求められる。すなわち流線型が採用される。

揚抗比は、流れが音速未満の場合には、流れに垂直な方向の長さが長い場合において大きくなる。飛行機の翼が前後方向に対して左右方向の幅が広い（アスペクト比が大きい）のは、揚抗比を大きくするためである。超音速では、造波抵抗を防ぐ三角翼などが適し、更に高速ではリフティングボディのような、翼を持たず胴体で揚力を発生する形状が研究されている。

また流れに対する立体形状の影響も大きく、帆船の帆には「横帆」と「縦帆」の二種類があるが、「縦帆」のほうが揚抗比を大きくできるので、風上への航行能力が高い。

## **Newton's laws: ニュートンの作用・反作用と揚力 lift and the deflection of the flowDeflection**





Streamlines around an airfoil in a wind tunnel.  
Note the curved streamlines above and below the foil,  
and the overall downward deflection of the air.

Lift is a **reaction force**—an airfoil deflects the air as it passes the airfoil. [Since the foil must exert a **force** on the air to change its direction, the air must exert a force of equal magnitude but opposite direction on the foil. In the case of an airplane wing, the wing exerts a downward force on the air and the air exerts an upward force on the wing.

The air changes direction as it passes the airfoil and follows a path that is curved. Whenever airflow changes direction, a reaction force is generated opposite to the directional change.

**Pressure differences** : 圧力差と揚力。曲率と流速が圧力を生む

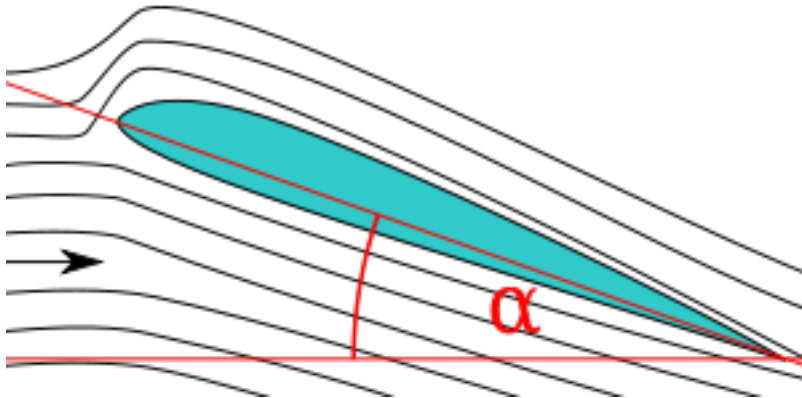
Lift may also be described in terms of air pressure: **pressure** is the **normal force** per unit area. Wherever there is net force there is also a pressure difference, thus deflection/flow turning indicates the presence of a net force and therefore a pressure difference. The direction of the net force implies that the average pressure on the upper surface of the wing is lower than the average pressure on the underside.

Whenever a fluid follows a curved path, there is a pressure **gradient** perpendicular to the flow direction. This direct relationship between curved streamlines and pressure differences was derived from Newton's second law by **Leonhard Euler** in 1754:

$$\frac{dp}{dR} = \rho \frac{v^2}{R}$$

where  $R$  is the radius of curvature,  $p$  is the pressure,  $\rho$  is the density, and  $v$  is the velocity. This formula shows that higher velocities and tighter curvatures create larger pressure differentials and that for straight flow ( $R \rightarrow \infty$ ) the pressure difference is zero.

## Angle of attack: 仰角と揚力、失速とは



The arrow is the vector representing the velocity of the air in the free stream around a stationary two-dimensional [airfoil](#). The upper red line is the chord line of the airfoil and the lower red line is parallel to the arrow. The angle  $\alpha$  is the angle of attack.

The [angle of attack](#) is the angle between an airfoil and the oncoming air. A symmetrical airfoil will generate zero lift at zero angle of attack. But as the angle of attack increases, the air is deflected through a larger angle and the vertical component of the airstream velocity increases, resulting in more lift. For small angles a symmetrical airfoil will generate a lift force roughly proportional to the angle of attack.

As the angle of attack grows larger, the lift reaches a maximum at some angle; increasing the angle of attack beyond this [critical angle of attack](#) causes the air to become turbulent and separate from the wing; there is less deflection downward so the airfoil generates less lift. The airfoil is said to be [stalled](#).

Lift coefficient : 揚力係数

If the lift coefficient for a wing at a specified angle of attack is known (or estimated using a method such as [thin airfoil theory](#)), then the lift produced for specific flow conditions can be determined using the following equation:

$$L = \frac{1}{2} \rho v^2 A C_L$$

where

- $L$  is lift force,
- $\rho$  is [air density](#),
- $v$  is [true airspeed](#),
- $A$  is [planform area](#), and

- $C_L$  is the lift coefficient at the desired angle of attack, [Mach number](#), and [Reynolds number](#)