条件つき確率　～モンティ・ホール問題～

伊藤慎吾

１９６０年代に始まったアメリカのテレビ番組「Let's make a deal」での話。司会者（モンティ・ホール）の名前からモンティ・ホール問題と呼ばれている。

問題１

挑戦者の前には３枚のドア A,B,C がある。
どれか一つのドアの後ろには、豪華な賞品が隠されているが、残り二つのドアはハズレである。
司会者は当たりのドアを知っているが、当然、挑戦者は知らない。

挑戦者は、ドア A を選んだ。すると、司会者は、残された２枚のドアのうちドア B を開け、それがハズレであることを挑戦者に見せた。ここで司会者は、挑戦者にこうもちかけた。
「はじめに選択したドア A のままでも結構。ですが、ここでドア C に変更してもかまいませんよ。」

さて、挑戦者はドアを変更すべきか否か。

解答

ドア A が当たるという事象を A（大文字）、ドア A を開けるという事象を a（小文字）で表すこととする。
すると、分布は次のようになる。
（ただし、ドア B,C がともにハズレの場合は無作為に開けるとする）

	a	b	c	計
A	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
B	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
C	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
計	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

よって、ドア B が開けられたとき、

$$P_b(A)=\frac{P(b\cap A)}{P(b)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\quad,\quad P_b(C)=\frac{P(b\cap C)}{P(b)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

よって、変更すべきである。

次に一般の場合で変更すべきか否か考えたいと思う。

問題２

ドアがｍ枚あり、司会者がｎ枚のドアを開ける場合は変更すべきか否か。（ $0 \leq n \leq m-2$ ）

解答

挑戦者が選ぶドアをA、残りのドアを $B_{1,} \cdots, B_{m-1}$ とし、司会者がドア B_1 ～ B_n を開けるものとする。

すると、

$$P_{b_{1,}\cdots,b_n}(A)=\frac{P(b_{1,}\cdots,b_n\cap A)}{P(b_{1,}\cdots,b_n)}=\frac{\frac{1}{m}\times\frac{1}{{}_{m-1}C_n}}{\frac{1}{{}_{m-1}C_n}}=\frac{1}{m}$$

$$P_{b_{1,}\cdots,b_n}(B_k)=\frac{P(b_{1,}\cdots,b_n\cap B_k)}{P(b_{1,}\cdots,b_n)}=\frac{\frac{1}{m}\times\frac{1}{{}_{m-2}C_n}}{\frac{1}{{}_{m-1}C_n}}=\frac{1}{m}\times\frac{m-1}{m-1-n} \quad (n+1\leq k\leq m-1)$$

$0 \leq n \leq m-2$ より、変更した方が得であることが分かる。

また、 $\frac{1}{m}\times\frac{m-1}{m-1-n}$ ということは、Aが当たる余事象の確率($1-\frac{1}{m-1}$)を残りの $m-1-n$ で分け合うということにちゃんとなっていることも確認できる。

（つぶやき）

ｍに対してｎが小さいとき、変更後の確率はあまり大きくならないので、変更してハズレた方がショックが大きいかもしれません。

（参考文献）

Newton 別冊 「宇宙や法則がよくわかる　やさしい数学の世界」　2009　ニュートンプレス